

Il calcolo dell'errore di trasmissione, D. Marano, M. Turci, L. Pascale, G. Colombini

**Introduzione**

L'emissione acustica di una trasmissione meccanica ad ingranaggi è il risultato della propagazione strutturale (structure-borne) ed aerea (air-borne) delle vibrazioni meccaniche indotte dagli ingranaggi, dai cuscinetti e dal motore elettrico. Con particolare riferimento agli ingranaggi, si distinguono due tipologie di rumore: il "rattle" ed il "whine", quest'ultimo causato dall'oscillazione dell'errore di trasmissione. Esso può essere definito, per una coppia di ruote dentate, come la differenza tra la posizione effettiva dell'ingranaggio condotto e la posizione che questo occuperebbe nel caso di moto cinematicamente ideale.

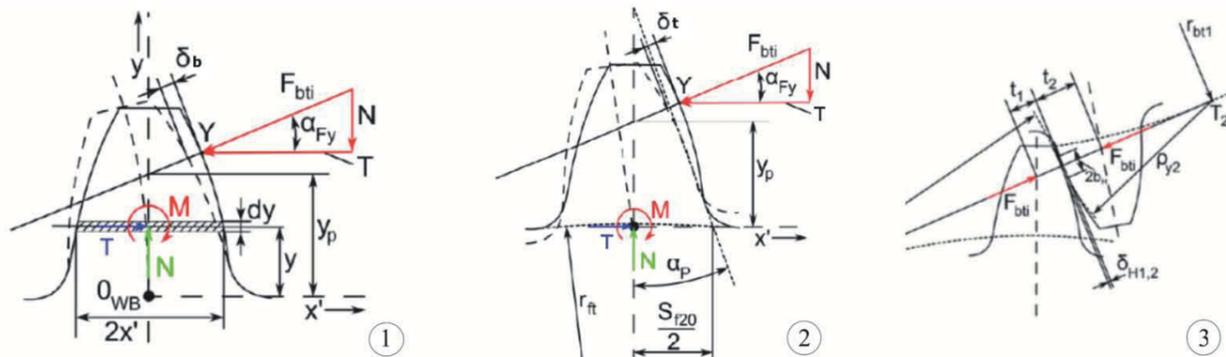
L'errore di trasmissione varia col carico ma anche in condizioni no-load è presente per via di errori geometrici, ossia di profilo, di passo, di eccentricità e di elica dovuti agli scostamenti di produzione.

L'errore di trasmissione sotto carico è influenzato principalmente dalla variazione di ricoprimento durante l'ingranamento e dalla conseguente variazione di deflessione del dente sotto carico, dunque dalla rigidità di ingranamento. In questo breve articolo si introducono i rudimenti teorici della formulazione numerica di Weber Banaschek, per il calcolo della rigidità di ingranamento, unitamente ad un esempio applicativo di calcolo realizzato in KISSsoft, in cui si confronta l'effetto della microgeometria sull'errore di trasmissione sotto carico.

**L'approccio analitico di Weber – Banaschek al calcolo della rigidità di ingranamento**

La teoria formulata da Weber e Banaschek nel 1953, fornisce una rappresentazione analitica dell'ingranamento sotto carico ed un modello matematico della rigidità di ingranamento. Secondo questa teoria, in riferimento ad un ingranaggio costituito da una coppia di ruote cilindriche a denti dritti, il carico trasversale nominale agente sui denti durante l'ingranamento, genera su di essi una deformazione complessiva  $\delta$  che risulta essere la somma di tre diverse componenti:

1. Flessione:  $\delta_b$  (Fig. 1)
2. Inclinazione:  $\delta_t$  (Fig. 2)
3. Schiacciamento Hertziano:  $\delta_H$  (Fig. 3)



La componente di deformazione  $\delta_b$  rappresenta la flessione del dente, calcolata considerando il dente come incastrato su un corpo infinitamente rigido. La componente di inclinazione  $\delta_t$  rappresenta la deformazione della base del dente (corpo ruota) ottenuta considerando il dente infinitamente rigido. Analiticamente tali termini rappresentano l'energia di deformazione del momento flettente  $M$ , della forza normale  $N$  e della forza di taglio  $T$  originati dalla scomposizione della forza  $F_{bti}$  nei rispettivi sistemi di riferimento. Per ricavare l'espressione di tale energia si applica il teorema di Castigliano alle due diverse configurazioni, ottenendo le seguenti espressioni:

$$\delta_b = \frac{F_{bti}}{b} \cdot \cos^2(\alpha_{Fy}) \cdot \frac{1-v^2}{E} \cdot \left[ 12 \int_0^{y_p} \frac{(y_p-y)}{(2x')^3} dy + (\tan^2(\alpha_{Fy}) + \frac{2.4}{1-v} \cdot \int_0^{y_p} \frac{dy}{2x'} \right]$$

$$\delta_t = \frac{F_{bti}}{b} \cdot \cos^2(\alpha_{Fy}) \cdot \frac{1-v^2}{E} \cdot \left[ \frac{18}{\pi} \cdot \frac{y_b^2}{s_{f20}^2} + \frac{2(1-2\nu)}{1-v} \cdot \frac{y_b}{s_{f20}} + \frac{4.8}{\pi} \left( 1 + \frac{1-v}{2.4} \tan^2(\alpha_{Fy}) \right) \right]$$

La terza componente della deformazione  $\delta_H$  descrive lo schiacciamento dei due denti secondo la teoria di Hertz. In particolare, secondo questo modello, la distanza  $t_{1,2}$  a cui corrisponde l'annullamento della deformazione coincide con la distanza che intercorre tra il punto di contatto fra i due denti e il punto di intersezione della linea di azione con l'asse di simmetria del dente.

$$\delta_{H1,2} = \frac{F_{bti}}{\pi b_g} \cdot \left| \frac{1-v_1^2}{E_1} \cdot \ln\left(\frac{b_H^2}{4t_1^2}\right) + \frac{\nu_1(1+\nu_1)}{E_1} \right| + \frac{F_{bti}}{\pi b_g} \cdot \left| \frac{1-v_2^2}{E_2} \cdot \ln\left(\frac{b_H^2}{4t_2^2}\right) + \frac{\nu_2(1+\nu_2)}{E_2} \right|$$

La cedevolezza complessiva di ingranamento, sarà quindi data dalla somma delle cedevolezza relative alle singole deformazioni:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_{b1}} + \frac{1}{C_{b2}} + \frac{1}{C_{t1}} + \frac{1}{C_{t2}} + \frac{1}{C_{H1,2}}$$

ove il pedice 1,2 indica la deformazione rispettivamente di pignone e corona.

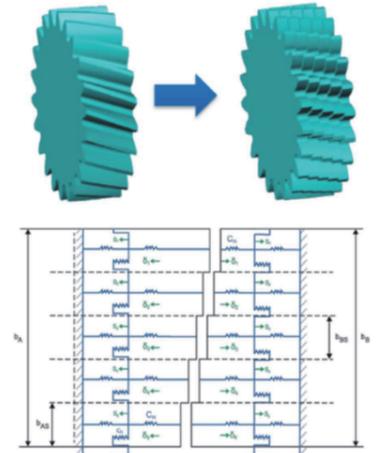
L'estensione di tale teoria agli ingranaggi cilindrici a denti elicoidali prevede la suddivisione della larghezza di fascia delle ruote in un dato numero di dischi sottili, il cui comportamento è approssimato a quello di un ingranaggio cilindrico a denti dritti, collegati tra loro mediante rigidità torsionale  $C_c$  definita come:

$$C_c = f \cdot A_{sec}^2 \cdot \frac{C_i + C_{i+1}}{2}$$

dove:

- $A_{sec}$  è il numero di dischi sottili.
- $f$  fattore che tiene conto della relazione tra le due dischi consecutivi, solitamente pari a 0.04
- $C_i$  e  $C_{i+1}$  sono le rigidità totali dei dischi  $i$ -esimo e  $i+1$ -esimo

È possibile peraltro osservare che la deformazione locale teorica di un  $i$ -esimo disco risulta superiore rispetto alla deformazione reale, poiché nella realtà esiste un'azione di supporto da parte dei dischi vicini, cosa che invece non avviene per le sezioni marginali del dente. Per approfondimenti sull'argomento si rimanda ai testi citati in bibliografia [1,2].



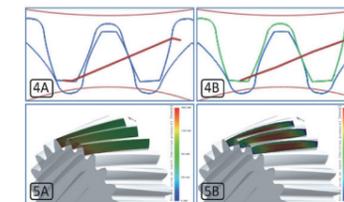
**Case Study: Effetto della microgeometria sull'errore di trasmissione sotto carico**

Si considera nel seguito un semplice sistema costituito da una coppia di ruote, e si analizza il picco-picco dell'errore di trasmissione in una data condizione di carico, per verificare il benefico effetto della microgeometria. In particolare si introducono:

- Modifiche di angolo d'elica per compensare la deflessione flessionali degli alberi e i cedimenti dei cuscinetti sotto carico
- Bombature longitudinali per centrare il contatto sulla fascia e rendere il sistema meno sensibile agli scostamenti geometrici
- Spoglie di testa per evitare urti sullo spigolo del dente.

In assenza di modifiche microgeometriche, si ha la situazione mostrata nella Figura 4A: il contatto si estende oltre la retta d'azione, ad indicare la presenza di urti in accesso e recesso. Inoltre, il contatto non è distribuito uniformemente lungo la fascia del dente, come si può notare dall'impronta di contatto in Figura 5A.

Tramite l'applicazione delle modifiche microgeometriche sopra citate (sono da definire in maniera opportuna i valori di tali modifiche) è possibile ottenere il risultato nella figura 4B, ossia il contatto si sviluppa interamente lungo la retta d'azione, a beneficio dell'emissione sonora. Inoltre il contatto risulta essere ben centrato rispetto alla fascia (Fig. 5B) [3] Il PPTF si riduce di oltre il 50% passando da circa 1.6  $\mu m$  a 0.7  $\mu m$  con ulteriori margini di ottimizzazione



**Conclusioni**

Mediante programmi di calcolo come KISSsoft è possibile studiare il comportamento degli ingranaggi analizzando parametri quale l'errore di trasmissione sotto carico. Mediante un opportuno dimensionamento della microgeometria delle ruote esso può essere ottimizzato, riducendo così l'emissione acustica della trasmissione.

**Bibliografia**

- [1] Weber C., Banaschek K.; FVA-Bericht 129 und 134, Elastische Formänderung der Zähne und der anschliessenden Teile der Radkörper von Zahnradgetrieben, FVA 1955
- [2] L. Pascale, Modeling and Simulation of an automotive E-axle - Tesi magistrale presso l'Università di Modena e Reggio Emilia.
- [3] M. Turci, Design and optimization of a hybrid vehicle transmission, AGMA 18FTM06, – AGMA Fall Technical Meeting 2018 – Gear Technology, May 2019